Maths Expertes **CS $n°2$ du Vendredi 17 Février 2023** **Thiaude P.**

Durée : 1h **Calculatrice INTERDITE**

<u>Exercice 1</u> [7 points]

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 + z^2(-1+2i) + z(-1-i) + 10 - 10i$$

1. Le polynôme P admet une et une seule racine réelle : la déterminer.
2. Donner une factorisation de $P(z)$.
3. Déterminer un complexe δ tel que : $\delta^2 = -15 + 8i$.
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

<u>Exercice 2</u> [6 points]

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 + z^2(-13+i) + z(60-8i) - 100 + 20i$$

1. Montrer que $P(z)$ est factorisable par $z^2 - 8z + 20$.
2. Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme du second degré $z \mapsto z^2 - 8z + 20$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ puis déterminer le produit des solutions de cette équation.

<u>Exercice 3</u> [7 points]

1. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $a \in \mathbb{C}$ on a l'équivalence :
$$z^2 = a^2 \Leftrightarrow z = a \ \ ou \ \ z = -a$$
2. **a.** Déterminer la forme algébrique de :
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
   b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^2 = i$.

   c. Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^2 = -i$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^8 - 1 = 0$ puis déterminer la somme des solutions de cette équation.
4. Pour n entier naturel non nul, on considère l'équation (E_n) : $z^{2n} - 1 = 0$.
Déterminer la somme des solutions de (E_n).

Corrigé
Exercice 1

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 + z^2(-1+2i) + z(-1-i) + 10 - 10i$$

1. Notons x la racine réelle de P.
On a d'une part $P(x) = 0$ et d'autre part on a :
$$P(x) = x^3 + x^2(-1+2i) + x(-1-i) + 10 - 10i = x^3 - x^2 + 2x^2 i - x - xi + 10 - 10i$$
$$= x^3 - x^2 - x + 10 + i(2x^2 - x - 10)$$
donc : $x^3 - x^2 - x + 10 + i(2x^2 - x - 10) = 0$.
Or, un complexe est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles, donc :
$x^3 - x^2 - x + 10 = 0$ et $2x^2 - x - 10 = 0$.
L'équation $2x^2 - x - 10 = 0$ d'inconnue réelle x est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 2$, $b = -1$ et $c = -10$, de discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(2)(-10) = 1 + 80 = 81$ donc elle admet deux racines réelles distinctes :
$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1-9}{2(2)} = \frac{-8}{4} = -2$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1+9}{2(2)} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$
• si $x = -2$ alors : $x^3 - x^2 - x + 10 = (-2)^3 - (-2)^2 - (-2) + 10 = -8 - 4 + 2 + 10 = 0$
donc : $x = -2$ est accepté.
• si $x = \frac{5}{2}$ alors $x^3 - x^2 - x + 10 = \left(\frac{5}{2}\right)^3 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} + 10 = \frac{135}{8} \neq 0$ donc $x = \frac{5}{2}$ est refusé.
Finalement : P admet pour unique racine réelle : -2.

2. **Factorisation de $P(z)$**
(-2) est une racine de P donc $P(z)$ est factorisable par $(z+2)$ et comme le coefficient du terme de plus haut degré de P est 1 on en déduit qu'il existe $b \in \mathbb{C}$ et $c \in \mathbb{C}$ tels que :
$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z+2)(z^2 + bz + c)$$
autrement dit :
$$\forall z \in \mathbb{C}, z^3 + z^2(-1+2i) + z(-1-i) + 10 - 10i = z^3 + z^2(b+2) + z(c+2b) + 2c$$
Or, deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et des coefficients égaux :
$$\begin{cases} b+2 = -1+2i \\ c+2b = -1-i \\ 2c = 10-10i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3+2i \\ c+2b = -1-i \\ c = 5-5i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3+2i \\ 5-5i+2(-3+2i) = -1-i \checkmark \\ c = 5-5i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3+2i \\ c = 5-5i \end{cases}$$
On a donc : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z+2)(z^2 + (-3+2i)z + 5 - 5i)$.

3. **Déterminons un complexe δ tel que : $\delta^2 = -15 + 8i$.**
On a : $-15 + 8i = -16 + 1 + 8i = (4i)^2 + 1 + 2(1)(4i) = 1^2 + 2(1)(4i) + (4i)^2 = (1+4i)^2$
En posant $\delta = 1 + 4i$ on a $\delta^2 = -15 + 8i$ donc : $\delta = 1 + 4i$ convient.

4. **Équation $P(z) = 0$**
En utilisant la factorisation de $P(z)$ obtenue précédemment l'équation $P(z) = 0$ s'écrit :
$$(z+2)(z^2 + (-3+2i)z + 5 - 5i) = 0$$
$$\Leftrightarrow z + 2 \text{ ou } z^2 + (-3+2i)z + 5 - 5i = 0$$
L'équation $z^2 + (-3+2i)z + 5 - 5i = 0$ est de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -3 + 2i$ et $c = 5 - 5i$, de discriminant :
$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3+2i)^2 - 4(1)(5-5i) = (-3)^2 + 2(-3)(2i) + (2i)^2 - 4(5-5i)$$
$$\Delta = 9 - 12i - 4 - 20 + 20i = -15 + 8i$$
On a $\Delta = \delta^2$ avec $\delta = 1 + 4i$ d'après la question précédente.

Les solutions de $z^2 + (-3+2i)z + 5 - 5i = 0$ dans $\mathbb{C}$ sont :

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{3-2i-1-4i}{2(1)} = \frac{2-6i}{2} = 1-3i$$
$$z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{3-2i+1+4i}{2(1)} = \frac{4+2i}{2} = 2+i$$
Les solutions de $P(z) = 0$ sont donc : -2, $1-3i$ et $2+i$.

<u>Exercice 2</u>

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = z^3 + z^2(-13+i) + z(60-8i) - 100 + 20i$$

1. **Montrons que $P(z)$ est factorisable par $z^2 - 8z + 20$.**
   Comme le terme de plus haut degré de P est 1, $P(z)$ est factorisable par $z^2 - 8z + 20$ si et seulement si il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z-c)(z^2 - 8z + 20)$, ce qui s'écrit aussi :
   $$\forall z \in \mathbb{C}, (z-c)(z^2 - 8z + 20) = z^3 + z^2(-8-c) + z(20+8c) - 20c$$
   Or deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et des coefficients égaux :
   $$\begin{cases} -8-c = -13+i \\ 20+8c = 60-8i \\ -20c = -100+20i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -c = -5+i \\ 20+8c = 60-8i \\ c = \dfrac{100-20i}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5-i \\ 20+8(5-i) = 60-8i \ \checkmark \\ c = 5-i \ \checkmark \end{cases} \Leftrightarrow c = 5-i$$
   On en déduit qu'il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que : $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z-c)(z^2 - 8z + 20)$, à savoir $c = 5-i$, donc $P(z)$ est factorisable par $z^2 - 8z + 20$.

2. **Racines dans $\mathbb{C}$ de $z \mapsto z^2 - 8z + 20$**
   $z^2 - 8z + 20$ est de la forme $az^2 + bz + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -8$ et $c = 20$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(20) = 64 - 80 = -16$. On constate que $\Delta < 0$ et tous coefficients sont réels donc $z^2 - 8z + 20$ admet deux racines non réelles conjuguées :
   $$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{+8 - i\sqrt{16}}{2(1)} = \frac{8-4i}{2} = 4-2i \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = 4+2i$$

3. **Équation $P(z) = 0$**
   L'équation $P(z) = 0$ s'écrit aussi : $\big(z-(5-i)\big)(z^2 - 8z + 20) = 0$ qui est équivalent à :
   $z = 5-i$ ou $z^2 - 8z + 20 = 0$ autrement dit $z = 5-i$ ou $z = 4-2i$ ou $z = 4+2i$.
   L'équation $P(z) = 0$ admet donc pour solutions dans $\mathbb{C}$: $4-2i$, $4+2i$ et $5-i$.

   Produit des solutions
   La formule du produit des racines d'un polynôme s'écrit : $z_1 \times z_2 \times z_3 = (-1)^3 \frac{\alpha_0}{\alpha_3}$ donc :
   $$(4-2i) \times (4+2i) \times (5-i) = -\frac{-100+20i}{1} = 100 - 20i$$
   <u>Autre méthode</u>
   $$(4-2i)(4+2i)(5-i) = ((4)^2 - (2i)^2)(5-i) = (16+4)(5-i) = 20(5-i) = 100 - 20i$$

Exercice 3

1. **Démonstration de l'équivalence : $z^2 = a^2 \Leftrightarrow z = a \; ou \; z = -a$**

On a les équivalences :

$$z^2 = a^2 \Leftrightarrow z^2 - a^2 = 0 \Leftrightarrow (z+a)(z-a) = 0 \Leftrightarrow z + a = 0 \; ou \; z - a = 0 \Leftrightarrow z = -a \; ou \; z = a$$

2. a. **Forme algébrique de $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$**

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times (1+i)^2 = \frac{2}{4} \times (1 + 2i + i^2) = \frac{1}{2}(1 + 2i - 1) = i$$

Finalement :

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = i$$

b. **Solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^2 = i$**

On a :

$$z^2 = i \Leftrightarrow z^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; ou \;\; z = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \;\; ou \;\; z = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'équation $z^2 = i$ admet pour solutions $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

c. **Solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^2 = -i$**

On a :

$$z^2 = -i \Leftrightarrow z^2 = i^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow z^2 = \left(i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2 \Leftrightarrow z^2 = \left(i\frac{\sqrt{2}}{2} + i^2\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow z^2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \; ou \; z = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow z = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \; ou \; z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2}$$

L'équation $z^2 = -i$ admet pour solutions $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3. **Équation $z^8 - 1 = 0$**

$$z^8 - 1 = 0 \Leftrightarrow (z^4)^2 - 1^2 = 0 \Leftrightarrow (z^4+1)(z^4-1) = 0 \Leftrightarrow ((z^2)^2 - i^2)((z^2)^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z^2+i)(z^2-i)(z^2+1)(z^2-1) = 0 \Leftrightarrow z^2 + i = 0 \; ou \; z^2 - i = 0 \; ou \; z^2 + 1 = 0 \; ou \; z^2 - 1 = 0$$

- les équations $z^2 = i$ et $z^2 = -i$ ont été étudiées à la question précédente
- $z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 - i^2 = 0 \Leftrightarrow (z+i)(z-i) = 0 \Leftrightarrow z + i = 0 \; ou \; z - i = 0 \Leftrightarrow z = -i \; ou \; z = i$
- $z^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 - 1^2 = 0 \Leftrightarrow (z+1)(z-1) = 0 \Leftrightarrow z + 1 = 0 \; ou \; z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = -1 \; ou \; z = 1$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^8 - 1 = 0$ est donc :

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{1; -1;\; i;\; -i;\; \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2};\; \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

Somme des solutions

Dès qu'un nombre est solution, son opposé aussi, donc la somme des solutions vaut $0 + 0 + 0 + 0$ c'est-à-dire 0.

Autre méthode

$\forall z \in \mathbb{C}, z^8 - 1 = 1z^8 + 0z^7 + 0z^6 + 0z^5 + 0z^4 + 0z^3 + 0z^2 + 0z + (-1)$

Or la somme des racines d'un polynôme de degré 8 est : $-\frac{\alpha_7}{\alpha_8}$ donc la somme des solutions de $z^8 - 1 = 0$ est égale à : $-\frac{0}{1}$ c'est-à-dire 0.

4. **Somme des solutions de $(\boldsymbol{E_n}) : \boldsymbol{z^{2n} - 1 = 0, n} \in \mathbb{N}^*$**

Remarquons d'abord que $1^{2n} - 1 = 1 - 1 = 0$ donc l'ensemble des solution est <u>non vide</u>.

Soit a une solution de (E_n) : $a^{2n} - 1 = 0$, alors :

$$(-a)^{2n} - 1 = (-1)^{2n} \times a^{2n} - 1 = 1 \times a^{2n} - 1 = a^{2n} - 1 = 0 \ (a\ est\ une\ solution\ de\ (E_n))$$

donc $(-a)$ est aussi une solution de (E_n) ; dès qu'un nombre est solution de (E_n) son opposé aussi donc la somme des solutions vaut $\underbrace{0 + 0 + \cdots + 0}_{n\ termes} = 0$.

Autre méthode

$\forall z \in \mathbb{C}, z^{2n} - 1 = 1z^{2n} + 0z^{2n-1} + \cdots + 0z + (-1)$

La somme des solutions d'un tel polynôme est :

$$-\frac{\alpha_{2n-1}}{\alpha_{2n}} = -\frac{0}{1} = 0$$